

PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO PARA UM MODELO DE UM HELICÓPTERO COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE BASEADO NO MÉTODO LQG/LTR

Rubens Junqueira Magalhães Afonso, rubensjma@gmail.com

Karl Heinz Kienitz, kienitz@ita.br

Roberto Kawakami Harrop Galvão, kawakami@ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Engenharia Eletrônica, 12228-900, São José dos Campos - SP

Resumo. Neste trabalho investigam-se os possíveis benefícios da aplicação de um controlador projetado através do método LQG/LTR para um modelo não-linear de um mini-helicóptero de laboratório para testes com três graus de liberdade. O modelo utilizado é de 6^a ordem e instável em malha aberta. Em particular, o estudo trata da verificação da robustez da estabilidade do sistema projetado a possíveis falhas nos motores do mini-helicóptero. Tais falhas são modeladas como reduções nos ganhos dos atuadores. Os resultados são avaliados através de simulações no ambiente Matlab/Simulink. Para tanto, a resposta do sistema em malha fechada é analisada considerando o sobressinal apresentado e o erro de regime.

Palavras-chave: Linear Quadratic Gaussian; Loop Transfer Recovery; Robustez; Estabilidade

1. INTRODUÇÃO

Neste estudo, é considerado o problema de controle de um modelo de mini-helicóptero com três graus de liberdade desenvolvido em (Lopes, 2007) e aprimorado em (Handro, 2008). A dinâmica do helicóptero pode ser descrita por um modelo de 6^a ordem tendo como variáveis de estado os ângulos de deslocamento (*Travel*, T), elevação (*Elevation*, E) e arfagem (*Pitch*, P), bem como as respectivas taxas de variação (\dot{T} , \dot{E} , \dot{P}), vide Eq. 1. As entradas correspondem às tensões de alimentação dos dois motores acoplados às hélices.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \xi_{16} \{ \xi_1 (u_1^2 - u_2^2) + \xi_2 (u_1 - u_2) - \nu_2 x_2 \} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_6^2 \{ \xi_3 \sin 2x_3 + \xi_4 \cos 2x_3 \} + \xi_5 \sin x_3 + \xi_6 \cos x_3 + \{ \xi_7 (u_1^2 + u_2^2) + \xi_8 (u_1 + u_2) \} \cos x_1 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \{ \xi_{13} + \xi_{14} \sin 2x_3 + \xi_{15} \cos 2x_3 \}^{-1} \{ \nu_1 - \nu_3 x_6 + [\xi_9 (u_1^2 + u_2^2) + \xi_{10} (u_1 + u_2)] \sin x_1 + \\ &\quad x_4 x_6 [\xi_{11} \sin 2x_3 + \xi_{12} \cos 2x_3] \} \end{aligned} \quad (1)$$

Na Eq. 1, o estados x_1 , x_3 e x_5 representam as saídas do sistema, que são os ângulos de arfagem (*Pitch*, P), elevação (*Elevation*, E) e deslocamento (*Travel*, T), respectivamente, em radianos. As variáveis de controle são as tensões aplicadas aos motores dianteiro (u_1) e traseiro (u_2) do mini-helicóptero. A Fig. 1 apresenta o mini-helicóptero.

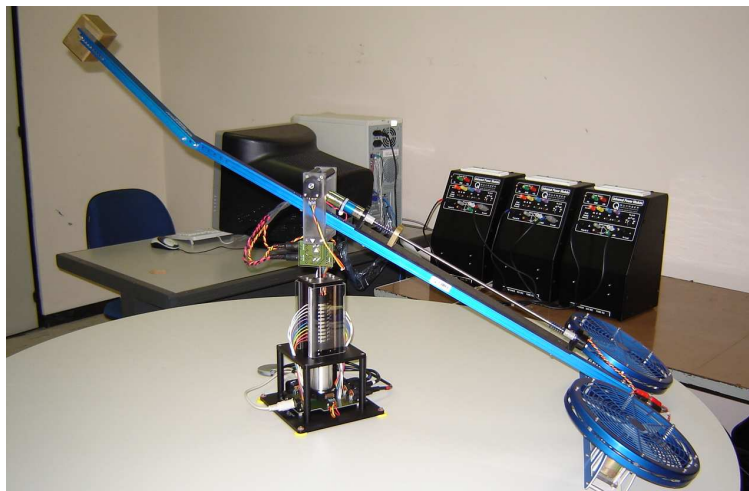


Figura 1: Mini-helicóptero com três graus de liberdade controlado por computador.

As saídas disponíveis para realimentação através das medidas de *encoders* referem-se aos ângulos de arfagem, elevação e deslocamento (estados x_1 , x_3 e x_5 , respectivamente). Suas taxas de variação temporal (estados x_2 , x_4 e x_6), entretanto, não são medidas e devem ser estimadas. Por esse motivo, o projeto de um controlador através da metodologia *Linear Quadratic Gaussian / Loop Transfer Recovery* (LQG/LTR) (Athans, 1982), (Cruz, 1996), (Stein, 1987) apresenta-se como uma alternativa interessante, pois inclui um Filtro de Kalman, que realiza as estimações de estado necessárias à realimentação (Doyle and Stein, 1979).

Detalhes sobre a geometria do sistema estão apresentados na Fig. 2. Para fins de controle, as restrições dizem respeito à saturação dos motores e a limitações impostas sobre o espaço de manobra do helicóptero.

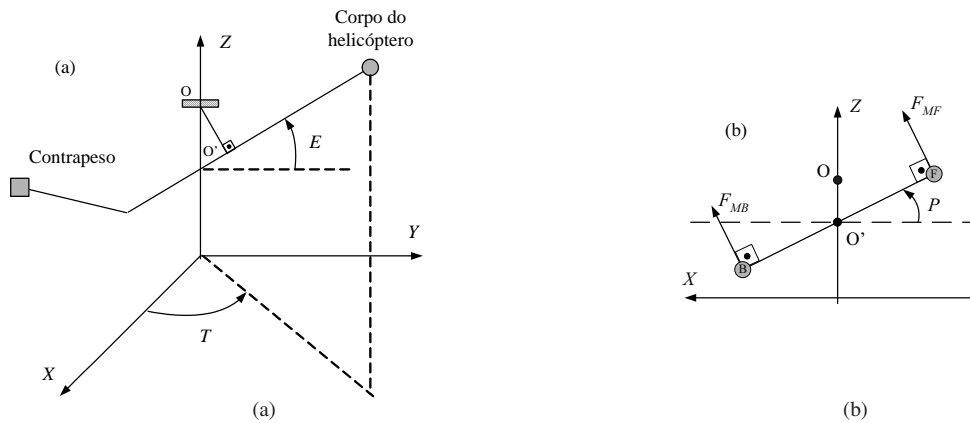


Figura 2: (a) Representação esquemática do helicóptero. (b) Vista do corpo principal do helicóptero no plano ortogonal ao braço de sustentação. F_{MF} e F_{MB} representam as forças geradas pelos motores dianteiro e traseiro, respectivamente.

O modelo a ser utilizado no projeto do controlador LQG/LTR foi obtido mediante linearização em torno de um ponto de equilíbrio. Tomando os parâmetros ξ_1, \dots, ξ_{16} , ν_2 e ν_3 conforme em (Handro 2008), e escolhendo $\nu_1 = 0$, por simplicidade, para que o equilíbrio ocorra com o helicóptero na horizontal, temos as seguintes matrizes do modelo linearizado para o helicóptero em torno deste ponto de equilíbrio ($x_{eq} = 0$, $u_{1eq} = u_{2eq} = 2,9735V$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,7530 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,0389 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -1,3426 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4377 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2,966 & -2,966 \\ 0 & 0 \\ 0,4165 & 0,4165 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

O principal aspecto investigado foi a robustez do controlador com respeito a possíveis falhas nos motores. Para esse propósito, as falhas foram modeladas como alterações nos ganhos dos atuadores.

Em malha aberta, para um degrau no deslocamento de 10° , tem-se a resposta ilustrada na Fig. 3. Fica evidente a partir da Fig. 3 que o sistema é instável em malha aberta.

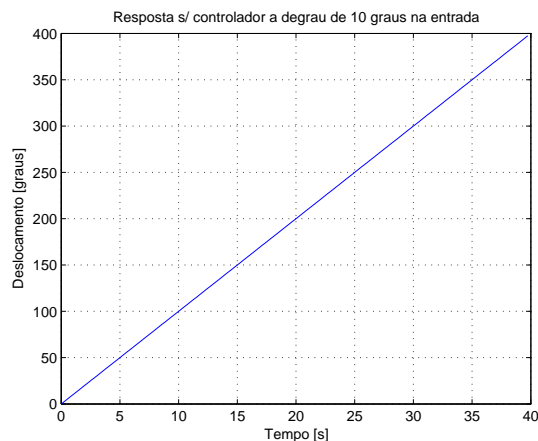


Figura 3: Resposta da planta sem controlador para um degrau de 10° no deslocamento

1.1 Projeto LQG/LTR

O acrônimo LQG vem do método de projeto de um controlador ótimo para uma planta linear com ruído de estado e saída gaussianos e não correlacionados e significa *Linear Quadratic Gaussian*. Quanto ao LTR, trata-se de *Loop Transfer Recovery*.

O método LQG/LTR procura definir um compensador $K(s)$ que respeite as especificações de estabilidade da robustez e desempenho (Athans 1982).

Primeiramente, calcula-se o ganho (H) que produza a função de transferência desejada para o sistema realimentado (*Target Feedback Loop*) (Stein 1987). Em seguida, o problema dual de determinar um regulador linear quadrático é resolvido, de modo a recuperar essa função de transferência com o compensador projetado.

O que o método faz, essencialmente, é produzir a melhor dinâmica inversa estável para a planta e multiplicar a dinâmica desejada (Skogestad, 2005). Alguns pólos do compensador são usados para cancelar zeros de transmissão da planta. Por isso o método “não funciona com perfeição” para plantas com zeros no semi-plano direito (Cruz 1996).

Para tanto, há alguns parâmetros de projeto. São eles:

- A matriz L , usada na obtenção da dinâmica alvo
- μ , também usado na obtenção da dinâmica alvo
- A matriz Q , usada na recuperação da dinâmica alvo
- ρ , também usado na recuperação da dinâmica alvo

Para apresentações detalhadas do método remete-se a (Athans 1982) e (Cruz 1996).

O restante do artigo está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 especifica as exigências de controle a serem atingidas. Na Seção 3, formula-se o descasamento entre a planta e o modelo devido à redução dos ganhos dos atuadores como incertezas multiplicativas. A dinâmica alvo que apresenta as características desejadas é obtida na Seção 4, bem como a sua recuperação. A Seção 5 apresenta as matrizes de ganho do controlador projetado e a sua matriz de transferência após as simplificações adequadas. Na Seção 6, os resultados de simulação do modelo não-linear controlado com o compensador projetado são mostrados e discutidos. Finalmente, a Seção 7 contém os comentários conclusivos.

2. ESPECIFICAÇÕES DE CONTROLE

As especificações que o sistema controlado deve atingir são escolhidas levando em consideração que o helicóptero deve atingir a posição de deslocamento (*Travel, T*) comandada sem erro de regime e que as demais variáveis de estado devem retornar aos seus valores de equilíbrio após a manobra. Adicionalmente, dado que o sistema pode ter falhas nos motores, a robustez da estabilidade a incertezas é de fundamental importância. Assim sendo, as especificações de controle podem ser colocadas da seguinte forma:

Tarefa do Controlador:

Após um degrau no deslocamento:

- O helicóptero deve atingir esta posição com erro de regime nulo.
- Os ângulos de arfagem e elevação devem retornar aos seus valores iniciais.

Objetivos do controle:

- Remover o erro de regime.
- Garantir a robustez (em especial da estabilidade) do sistema controlado.
- Sobressinal menor do que 40% no deslocamento.

Visando eliminar o erro de regime, integradores são inseridos nas entradas da planta, conforme o procedimento descrito em (Cruz 1996), aumentando a ordem do sistema de 6 para 8, sendo as matrizes resultantes dadas na Eq. 3.

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_a = [0 \quad C] \quad (3)$$

A função de transferência obtida após a inserção dos integradores é apresentada na Eq. 4. Esses integradores fazem parte do controlador projetado e a função de transferência da Eq. 4 não representa a função de transferência da planta, mas

aquela usada para calcular o controlador através do método LQG/LTR, que deverá ser aumentado com os integradores antes de ser utilizado pra controlar a planta original.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,967}{s^3+0,967s^2+0,4165} & \frac{-2,967}{s^3+0,967s^2+0,4165} \\ \frac{-3,983}{s^3+1,039s} & \frac{3,983}{s^3+1,039s} \end{bmatrix} \quad (4)$$

A função de transferência da Eq. 4 não possui zeros e, portanto, é de fase mínima, isto é, pode-se recuperar a dinâmica projetada com aproximação arbitrária (diminuindo o valor de ρ).

Ainda, a tensão aplicada aos motores é limitada entre 0 e 5V, representando, portanto, limitação sobre o controle que pode ser aplicado. Visto que a linearização ocorreu em torno de ($u_{1eq} = u_{2eq} = 2,9735V$), os limites para o controle produzido pelo controlador projetado devem ser $-2,9735V$ e $2,0265V$.

3. ERROS DE MODELAGEM

Os erros no modelo são descasamentos entre o ganho nominal de tensão aplicada aos atuadores e o ganho real, sendo que o ganho real pode ser menor do que o nominal. O erro máximo constitui-se de uma diminuição de 30% do valor nominal do ganho.

Erros nos ganhos dos motores refletem-se diretamente sobre a matriz de transferência e podem ser modelados como incertezas multiplicativas, conforme na Eq. 5.

$$G(s) = (I + E(s))G_N(s) \quad (5)$$

Sendo no pior caso estudado quando o ganho de um dos motores é reduzido a 70% do seu valor nominal, tem-se:

$$\begin{aligned} G(s) &= 0,7G_N(s) \\ I + E(s) &= 0,7I \\ e_m(\omega) &= 0,3 \end{aligned} \quad (6)$$

4. DINÂMICA ALVO

4.1 Obtenção da Dinâmica Alvo

A barreira a ser respeitada foi derivada a partir do descasamento entre a planta e o modelo. Para a robustez da estabilidade, utiliza-se a condição seguinte sobre o máximo valor singular da função de transferência de malha aberta ($\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)]$) dada pela Eq. 7, presente em (Cruz 1996).

$$\sigma_M [G_N(j\omega)K(j\omega)] < \frac{1}{1 + e_m(\omega)} \quad (7)$$

Definiu-se a matriz L após testes, que produz uma forma razoável para a função de transferência desejada, dada na Eq. 8.

$$L = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

E escolheu-se o valor de $\mu = 100000$ de forma a obter uma função de transferência alvo que respeite a barreira de robustez da estabilidade imposta. Na Fig. 4 mostram-se a barreira e os valores singulares da função de transferência alvo.

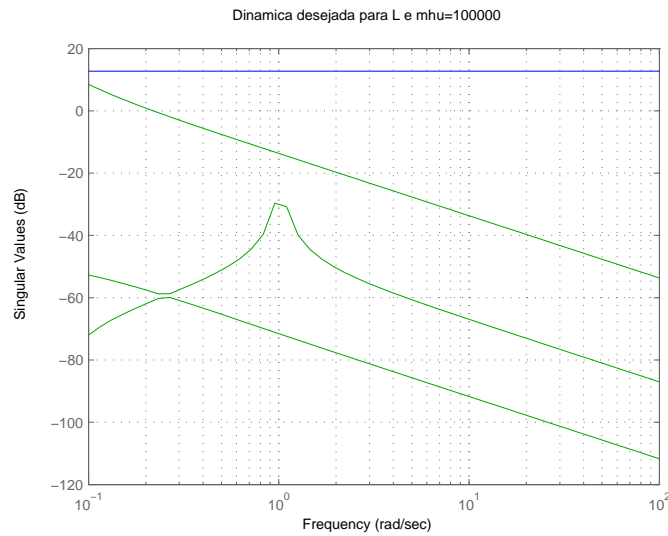


Figura 4: Diagrama de valores singulares da função alvo (verde) e barreira de robustez da estabilidade (azul)

Observando a Fig. 4 nota-se que não ocorrem violações da barreira de robustez da estabilidade, isto é, a inequação presente na Eq. 7 é respeitada. Isto deve implicar que o controlador projetado recuperando a dinâmica alvo deve ser capaz de manter a estabilidade mesmo no pior caso de descasamento entre a planta e o modelo.

4.2 Recuperação da Dinâmica Alvo

A recuperação é tanto melhor quanto menor o valor de ρ utilizado. Entretanto, deve-se atentar para o fato de que valores muito pequenos para essa variável podem propiciar sinais de controle demasiadamente agressivos e oscilatórios. A Fig. 5 ilustra a aproximação obtida para dois diferentes valores de ρ . Aquela com o menor valor ($\rho = 10^{-8}$) foi escolhida para este projeto, por ser considerada suficientemente próxima da TFL (*Target Feedback Loop*).

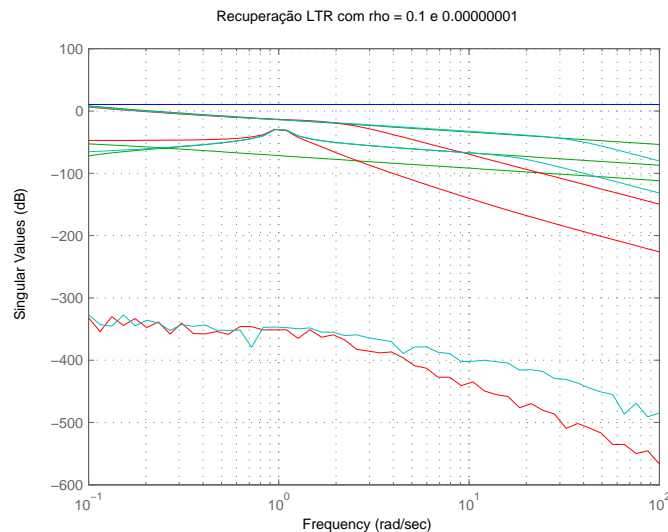


Figura 5: Diagrama de valores singulares da função alvo (verde), barreira de robustez da estabilidade (azul escuro) e das funções recuperadas para $\rho = 0, 1$ (vermelho) e $\rho = 10^{-8}$ (azul claro)

Para uma apresentação completa dos procedimentos de recuperação remete-se a (Kwakernaak, 1969), (Doyle 1979) e (Doyle and Stein, 1981).

5. CONTROLADOR PROJETADO

Com os valores tomados acima, as matrizes H e G obtidas para o controlador são aquelas mostradas na Eq. 9. Resultando em um controlador de oitava ordem, pois, conforme o método LQG/LTR, o controlador resultante tem a mesma ordem da planta com os estados aumentados pelos integradores.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,0005 & 0 & -0,0075 \\ 0 & 0 & -0,0002 \\ 0 & 0,0044 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,0075 & 0 & 0,2066 \\ -0,0014 & 0 & 0,0214 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$G = \begin{bmatrix} 53,0 & -17,0 & 7592,5 & 413,0 & 7026,1 & 781,4 & -7071,1 & -6864,7 \\ -17,0 & 53,0 & -7592,5 & -413,0 & 7026,1 & 781,4 & 7071,1 & 6864,7 \end{bmatrix}$$

A Figura 6 mostra a estrutura do controlador LQG/LTR. Nesta figura $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$, $e(s)$ é o sinal de erro (diferença entre o sinal de referência e o de saída) e $u(s)$ é o sinal de controle.

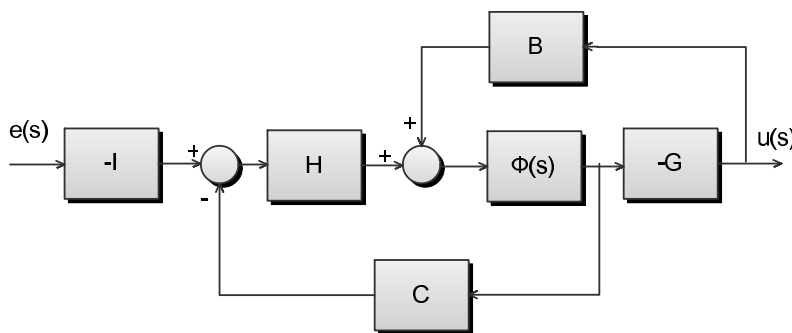


Figura 6: Estrutura do controlador LQG/LTR

Entretanto, quando o controlador é colocado na forma de uma matriz de transferência explicitando os seus zeros e pólos, nota-se que cancelamentos podem ser realizados. A matriz de transferência obtida após esses cancelamentos, incluindo os integradores que fazem parte do controlador, é:

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{66,57(s+0,76)(s+0,40)(s+0,18)(s+0,034)}{s(s+34,76)(s^2+1,89s+1,73)(s^2+34,75s+1208)} & \frac{31,26(s^2-0,11s+0,004)}{s(s+18,04)(s^2+18,04s+326,6)} & \frac{-1664,68(s+0,75)(s+0,44)(s+0,05)(s+0,04)}{s(s+34,76)(s^2+1,89s+1,73)(s^2+34,75s+1208)} \\ \frac{-66,57(s+0,76)(s+0,40)(s+0,18)(s+0,034)}{s(s+34,76)(s^2+1,89s+1,73)(s^2+34,75s+1208)} & \frac{31,26(s^2-0,11s+0,004)}{s(s+18,04)(s^2+18,04s+326,6)} & \frac{1664,68(s+0,75)(s+0,44)(s+0,05)(s+0,04)}{s(s+34,76)(s^2+1,89s+1,73)(s^2+34,75s+1208)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

6. RESULTADOS

Os resultados de simulações em malha fechada utilizando o controlador projetado são apresentados. Para tanto, utiliza-se o controlador projetado, adicionando os integradores, para controlar o modelo não-linear da planta.

A Fig. 7 mostra os resultados de uma simulação no simulink para um degrau de 10° aplicado ao deslocamento. Sendo um problema de regulação, aplicar um degrau de 10° ao deslocamento é o mesmo que partir com condição inicial de -10° nesta variável, e esta foi a abordagem usada na confecção dos gráficos da Fig. 7. Nesta percebe-se que o sobressinal respeita o valor desejado de 40% e o deslocamento retorna a zero, assim como os ângulos de arfagem e elevação, conforme os requisitos de projeto.

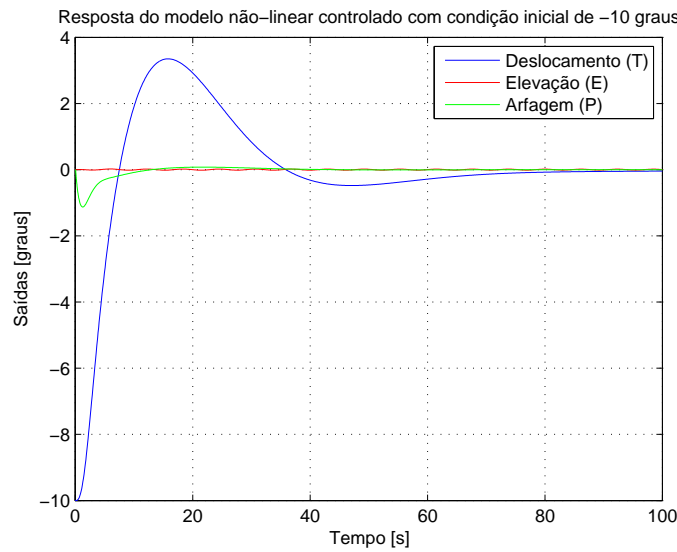


Figura 7: Resposta do modelo não-linear controlado com o compensador projetado, ganho nominal e condição inicial de -10° . Deslocamento (azul), arfagem (verde) e elevação (vermelho)

Nota-se que o tempo de subida e o tempo de acomodação são muito grandes, quando comparados aos obtidos em (Afonso and Galvão, 2007), no qual foi utilizada uma abordagem de Controle Preditivo para o mesmo modelo de helicóptero. Isto pode ser explicado pelo comportamento dos controles aplicados, visto na Fig. 8, que permanecem distantes dos valores limitantes superior de $2,0265V$ e inferior de $-2,9735V$. Assim, fica evidente a cautela excessiva introduzida neste projeto.

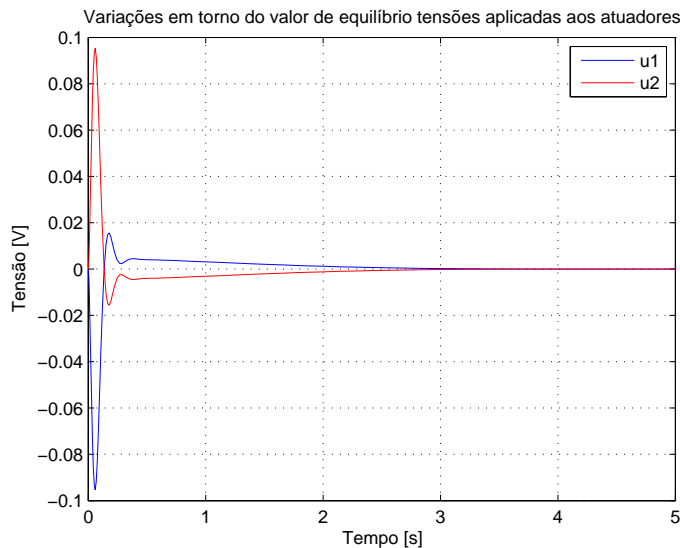


Figura 8: Variações das tensões aplicadas aos motores dianteiro (azul) e traseiro (vermelho) em torno do valor de equilíbrio $u_{eq} = 2,9735V$

A Fig. 9 mostra os resultados de simulações no simulink para um degrau de 10° aplicado ao deslocamento com os ganhos dos atuadores variando de 100% até 70%, com passo constante de 10%, a fim de testar a sua robustez a desvios da planta em relação ao modelo nominal. Fica evidente que a robustez é preservada inclusive para o pior caso (menor ganho).

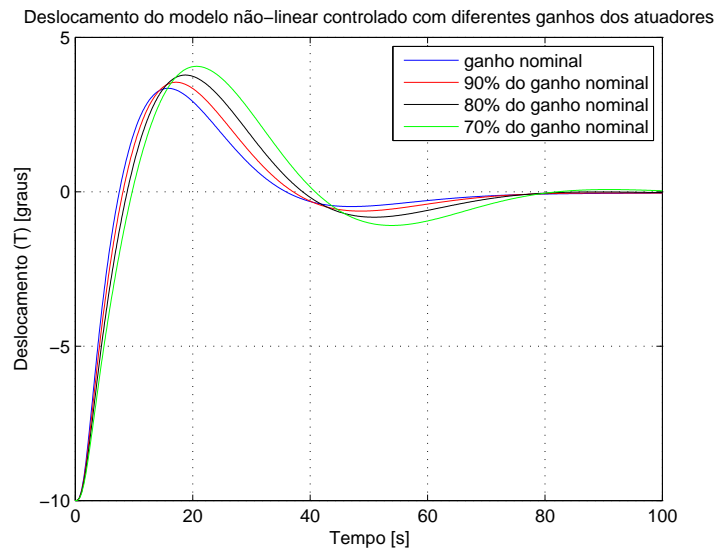


Figura 9: Deslocamento para diferentes valores do ganho dos atuadores: 100% do valor nominal (azul), 90% (vermelho), 80% (preto) e 70% (verde)

Finalmente, a Tab. 1 mostra que o valor de sobressinal desejado não é respeitado apenas no pior cenário estudado, no qual ocorre um sobressinal pouco maior do que 40%. Entretanto, tendo em vista que o projeto foi feito considerando a robustez da estabilidade, e não do desempenho, vemos que esta pequena violação não o compromete.

Ganho dos atuadores relativo ao nominal	Sobressinal
100%	34.06%
80%	36.00%
80%	38.14%
70%	40.17%

Tabela 1: Valores do sobressinal para diferentes ganhos dos atuadores

7. CONCLUSÃO

O projeto LQG/LTR apresenta suas dificuldades maiores na obtenção das barreiras a serem respeitadas. Além disso, as escolhas da matriz L sugeridas por (Athans 1982) e (Cruz 1996), neste caso, não foram as melhores e foi necessário um extenso procedimento de teste para obter uma matriz L e um valor de μ satisfatórios.

Finalmente, o projeto mostrou-se extremamente conservador em comparação, por exemplo, com uma abordagem de Controle Preditivo Baseado em Modelo aplicada ao mesmo modelo não-linear. Entretanto, a robustez da estabilidade, que era o principal objetivo, foi atingida e o desempenho foi aquele desejado, resultando em um compensador adequado para o sistema em questão.

Esses resultados encorajam o emprego combinado de uma técnica de Controle Preditivo Baseado em Modelo em conjunto com o compensador LQG/LTR, na qual o segundo constitui uma malha interna que estabiliza a planta e o primeiro fornece o sinal de referência para o sistema formado pela planta e o compensador LQG/LTR, como uma malha externa.

8. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem os apoios de FAPESP (auxílios 2008/10229-7 e 2006/58850-6), CNPq e CAPES (Pró-Engenharias).

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afonso, R. J. M. and Galvão, R. K. H., 2007, "Predictive control of a magnetic levitation system with infeasibility handling by relaxation of output constraints", ABCM Symposium Series in Mechatronics, Vol. 3, p. 11 – 18, 2007.
- Athans, M., 1982, "A tutorial on the LGQ/LTR method", Control Conference, American, Vol. 23.
- Cruz, J.J., 1996, "Controle Robust Multivariável", Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Doyle, J. C. and Stein, G., 1979, "Robustness with Observers", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, N. 4 p. 607 – 611, 1979.

- Doyle, J. C. and Stein, G., 1981, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, N. 1 p. 4 – 16, 1981.
- Handro, M., 2008, "Controle Preditivo Robusto de um Helicóptero com Três Graus de Liberdade Sujeito a Perturbações Externas", Master's thesis. ITA. São José dos Campos.
- Kwakernaak, H., 1969, "Optimal Low-sensitivity Linear Feedback Systems", Automatica, Vol. 5, N. 3 p. 279 – 285, 1969.
- Lopes, R. V., 2007, "Modelagem e Controle Preditivo de um Helicóptero com Três Graus de Liberdade", Master's thesis. ITA. São José dos Campos.
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I., 2005, "Multivariable Feedback Control: Analysis and Design", 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, 2005.
- Stein, G. and Athans, M., 1987, "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 32, N. 2, p. 105 – 114.

10. ADVERTÊNCIA DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis pelo material incluído neste artigo.